

Title	二平面壁の壁効果 (流体方程式の特異性)
Author(s)	佐野, 理
Citation	数理解析研究所講究録 (1977), 293: 10-27
Issue Date	1977-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/106194">http://hdl.handle.net/2433/106194</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 二平面壁の壁効果

東大 理 佐 野 理

はじめに

無限に広がった粘性流体中を微小物体がゆっくり運動するとき物体に働く力やモーメントは Stokes 近似によって求められているが、それらの値は物体のそばに他の境界があれば当然のことながら変更を受ける。相対する境界が壁の場合を特に壁効果と呼んでいるようであるが、この効果は一般に、壁の形とそれに対する物体の位置、物体の形状、back-ground flow の種類などによって異なる。これらの因子のうち、物体の形や back-ground flow に関しては脇屋正一氏をはじめ多くの研究者によって拡張がなされている——詳しくは Happel & Brenner の<sup>1)</sup>本を参照されたい——が、壁の形に関してはこれまでに一平面壁、<sup>2,3)</sup> 平行二平面壁、<sup>4,5,6)</sup> 円筒壁<sup>7)</sup> などごく限られたものしか解析されていなかった。ところが最近になって壁の形についてもいくつかの拡張がなされ、任意の角度で交わる二平面

壁で囲まれた領域内の任意の位置で円柱が任意の方向に運動する場合<sup>8)</sup>と任意角度の頂角をもつ円錐の対称軸上を3次元物体が軸方向に運動する場合<sup>8)</sup>が金文彦氏により、また任意頂角のくさび形領域内の任意の位置で3次元物体が任意方向に運動する場合<sup>9,10)</sup>が筆者及び橋本英典氏によって解析されているので、ここではその一部を紹介したい。

以下では全体を2つに大別し、第1部ではくさび形領域内の円柱の運動を、第2部では直交する二平面ではさまれる領域内の3次元物体の運動について議論しよう。

## [I] くさび形領域内の円柱の運動

第1部では、まず二平面壁の対称面上に置かれた円柱が対称面に平行及び垂直に運動する場合に円柱の単位長当りに働く力を壁の1次の効果まで考慮して計算し、またそれぞれの場合の角付近の流れを調べる。その後でくさび形領域内の任意の位置に於ける円柱の運動について簡単に述べることにしよう。

図1に示したように二平面の交点を原点とする直交座標  $x_1, x_2$

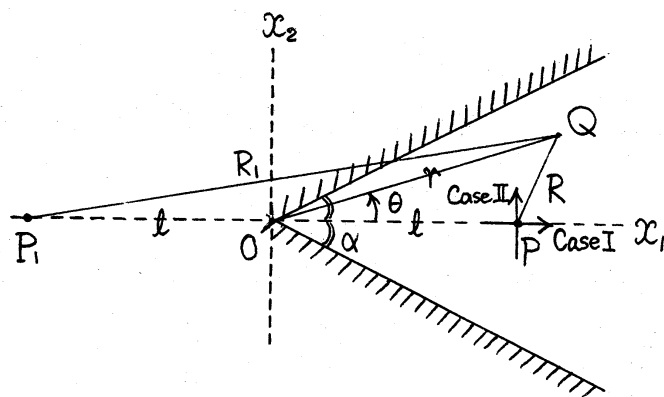


図 1

及び2次元極座標  $r, \theta$  をとる。二平面  $\theta = \pm \alpha$  ではさまれたくさび形領域内に非圧縮性粘性流体が満たされ、点  $P(l, 0)$  に半径  $a$  の円柱が置かれているとし、back-ground flow は考えない。以下の解析は Stokes 方程式に基づいて行なう。

Stokes 方程式の一般解<sup>11)</sup>としては次のような表現を用いる：

$$\begin{cases} v_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_\alpha \phi_\alpha) - 2\phi_i, & p = 2\mu \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \phi_\alpha, \\ \text{但し } \nabla^2 \phi_i = 0, & \mu \text{ は粘性率。} \end{cases} \quad \text{-----}(1.1)$$

また境界条件（以下では B.C. と略記する）は

$$\begin{cases} v_i = 0 & \text{at infinity,} \\ v_i = U_i & \text{on the cylinder,} \\ v_i = 0 & \text{on the walls,} \end{cases} \quad \text{-----}(1.2)$$

である。Stokes 方程式の線形性から、次の2つの場合を解析すれば円柱の任意の方向に対する結果が得られる：

(Case I) 円柱が対称面に沿って運動する場合、

(Case II) “ 垂直に “ 。

### Case I (円柱が $r$ 方向に速度 $U$ で並進運動をする場合)

以下で示すような method of reflections により解を構成する。

3次元物体の運動を扱う場合の method of reflections では、無限に広い流体内で物体が動く時に得られる解を第1近似とするが、円柱のような2次元物体では物体上及び無限遠の B.C.

を同時に満たす解が Stokes 近似の範囲内では得られない。そこで、考えようとする領域の外部の適当な点にはじめの円柱の運動に伴う特異性とは大きさが同じで方向が反対の特異性を持つ流れを考え、これとはじめの流れを加え合わせたものを第1近似の流れ  $V^{(1)} = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)})$  とする。即ち、

$$\begin{cases} v_1^{(1)} = A \left[ \frac{(x_1-l)^2}{R^2} - \ln R \right] + B \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1-l}{R^2} - A \left[ \frac{(x_1+l)^2}{R_1^2} - \ln R_1 \right], \\ v_2^{(1)} = A \frac{(x_1-l)x_2}{R^2} + B \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{x_1-l}{R^2} - A \frac{(x_1+l)x_2}{R_1^2}, \\ \text{但し、} R^2 = (x_1-l)^2 + x_2^2, \quad R_1^2 = (x_1+l)^2 + x_2^2. \end{cases} \quad (1.3)$$

(特異点の強さ  $A, B$  は円柱表面での B.C. から決定する)

次に壁の存在を考え、壁面ですべりなしの条件を満たすように (ie. 壁の上で  $V^{(1)} + V^{(2)} = 0$  となるように) 速度場  $V^{(2)}$  をつけ加える。ここで  $V^{(2)}$  は Stokes 方程式の解であるが (1.1) を 2次元極座標で表わして

$$\begin{cases} v_r^{(2)} = (r \frac{\partial}{\partial r} - 1)(\cos \theta \cdot \phi_1 + \sin \theta \cdot \phi_2), \\ v_\theta^{(2)} = \cos \theta \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \sin \theta \cdot \phi_1 - \cos \theta \cdot \phi_2, \\ \text{但し、} \nabla^2 \phi_i = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}) \phi_i = 0, \quad (i=1,2), \end{cases} \quad (1.4)$$

としたものを用いる。壁の上の B.C. は  $O(a)$  まで考慮して

$$\begin{cases} v_r^{(2)} = A \left[ \cos \theta \cdot \ln \frac{R}{R_1} + \frac{r l \sin^2 \theta}{R^2} + \frac{r l \sin^2 \theta}{R_1^2} \right]_{\theta=\pm\alpha} \equiv F(r, \alpha), \\ v_\theta^{(2)} = -A \left[ \sin \theta \left\{ \ln \frac{R}{R_1} + \frac{l(r \cos \theta - l)}{R^2} + \frac{l(r \cos \theta + l)}{R_1^2} \right\} \right]_{\theta=\pm\alpha} \equiv \pm G(r, \alpha), \\ \text{但し、} r^2 = x_1^2 + x_2^2, \end{cases} \quad (1.5)$$

となる。従って  $V^{(2)}$  を求める為には (1.5) のような境界条件の下に2つの調和関数  $\phi_1, \phi_2$  を求めればよい。

計算手順を示そう。

まず (1.4) (1.5) に Mellin 変換:

$$\hat{f}(s, \theta) \equiv \int_0^\infty dr \, r^{s-1} f(r, \theta), \quad \text{----- (1.6)}$$

を施す。これによって方程式及び B.C. は

$$\left( \frac{d^2}{d\theta^2} + s^2 \right) \hat{\phi}_i = 0, \quad (i=1, 2), \quad \text{----- (1.7)}$$

$$\begin{cases} -(s+1) [\cos\theta \cdot \hat{\phi}_1 + \sin\theta \cdot \hat{\phi}_2]_{\theta=\pm\alpha} = \hat{F}, \\ \left[ \cos\theta \frac{d}{d\theta} \hat{\phi}_1 + \sin\theta \cdot \hat{\phi}_1 + \sin\theta \frac{d}{d\theta} \hat{\phi}_2 - \cos\theta \cdot \hat{\phi}_2 \right]_{\theta=\pm\alpha} = \pm \hat{G}, \end{cases} \quad \text{----- (1.8)}$$

$$\text{但し} \begin{cases} \hat{F}(s, \alpha) = \frac{\pi A l^s}{s \cdot \sin(\pi s)} \left[ \cos\alpha \{ \cos[(\pi-\alpha)s] - \cos(\alpha s) \} \right. \\ \quad \left. + s \sin\alpha \{ \sin[(\pi-\alpha)s] - \sin(\alpha s) \} \right], \\ \hat{G}(s, \alpha) = \frac{\pi A l^s}{s \cdot \sin(\pi s)} (s-1) \sin\alpha \{ \cos[(\pi-\alpha)s] - \cos(\alpha s) \}, \end{cases} \quad \text{----- (1.9)}$$

$$(-1 < \text{Re}(s) < 1)$$

となる。これを解いて

$$\hat{\phi}_1 = C(s) \cos(s\theta), \quad \hat{\phi}_2 = D(s) \sin(s\theta), \quad \text{----- (1.10)}$$

$$\text{但し} \begin{cases} C(s) = 2\pi A l^s \left\{ \frac{s^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\alpha s)}{s(s+1)[\sin(2\alpha s) - s \sin(2\alpha)]} - \frac{1}{2} \frac{1 - \cos(\pi s)}{s(s+1) \sin(\pi s)} \right\}, \\ D(s) = 2\pi A l^s \left\{ \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2(\alpha s)}{(s+1)[\sin(2\alpha s) - s \sin(2\alpha)]} - \frac{1}{2} \frac{1 - \cos(\pi s)}{(s+1) \sin(\pi s)} \right\}, \end{cases} \quad \text{----- (1.11)}$$

を得る。

これに Mellin 逆変換を施せば  $\phi_1, \phi_2$  が求まり、更に (1.4) に

代入すれば  $V^{(2)}$  が定まる。即ち

$$\begin{cases} v_r^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} ds \, r^{-s} \left[ -(s+1)C(s) \cos\theta \cdot \cos(s\theta) - (s+1)D(s) \sin\theta \cdot \sin(s\theta) \right], \\ v_\theta^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} ds \, r^{-s} \left\{ C(s) \left[ -s \cdot \cos\theta \cdot \sin(s\theta) + \sin\theta \cdot \cos(s\theta) \right] \right. \\ \left. + D(s) \left[ s \cdot \sin\theta \cdot \cos(s\theta) - \cos\theta \cdot \sin(s\theta) \right] \right\}. \end{cases} \quad \text{----- (1.12)}$$

円柱上で  $V = U e_r$  の条件から  $A, B$  を決定すると

$$\begin{aligned} A &= U / \left[ \ln \frac{2l}{a} - \frac{1}{2} + [v_r^{(2)}/A]_p + O(a^2) \right] = U / \left[ \ln \frac{1}{a} + K_I(\alpha) + O(a^2) \right], \\ B &= \frac{1}{2} A a^2, \\ [v_r^{(2)}/A]_p &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{t^2 \sin^2 \alpha - \sinh^2(\alpha t)}{t [t \sin(2\alpha) - \sinh(2\alpha t)]} - \frac{\cosh(\pi t) - 1}{2t \sinh(\pi t)} \right\}, \end{aligned} \quad \text{----- (1.13)}$$

となり、単位長当り円柱に働く力（抵抗）は

$$F = -4\pi\mu A e_r = \frac{-4\pi\mu U}{\ln \frac{1}{a} + K_I(\alpha)} e_r, \quad \text{----- (1.14)}$$

( $e_r$ :  $r$  方向の単位ベクトル)

と表わされる。

## Case II (円柱が $\theta$ 方向に速度 $V$ で並進運動をする場合)

解析方法は Case I と同様。

$$V^{(1)} = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)}) :$$

$$\begin{cases} v_1^{(1)} = A' \frac{(x_1 - l)x_2}{R^2} + B' \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_2}{R^2} - A' \frac{(x_1 + l)x_2}{R_1^2}, \\ v_2^{(1)} = A' \left( \frac{x_2}{R^2} - \ln R \right) + B' \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{x_2}{R^2} - A' \left( \frac{x_2}{R_1^2} - \ln R_1 \right), \end{cases} \quad \text{----- (1.15)}$$

$$V^{(2)} = (V_r^{(2)}, V_\theta^{(2)}) :$$

$$\begin{cases} V_r^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dS \, r^{-S} [-(S+1)C'(S) \cos\theta \cdot \sin(S\theta) - (S+1)D'(S) \sin\theta \cdot \sin(S\theta)], \\ V_\theta^{(2)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dS \, r^{-S} \left\{ C'(S) [S \cdot \cos\theta \cdot \cos(S\theta) + \sin\theta \cdot \sin(S\theta)] \right. \\ \left. + D'(S) [-S \cdot \sin\theta \cdot \sin(S\theta) - \cos\theta \cdot \cos(S\theta)] \right\}, \end{cases} \quad (1.16)$$

但し

$$\begin{cases} C'(S) = -2\pi A' l^S \frac{\sin^2 \alpha}{S \cdot \sin \alpha + \sin(2\alpha S)}, \\ D'(S) = -2\pi A' l^S \left\{ \frac{\sin^2(\alpha S)}{S[S \cdot \sin \alpha + \sin(2\alpha S)]} - \frac{1}{2} \frac{1 - \cos(\pi S)}{S \cdot \sin(\pi S)} \right\}, \end{cases} \quad (1.17)$$

$$A' = V / \left[ \ln \frac{2l}{a} + \frac{1}{2} + [V_\theta^{(2)}/A']_p + O(a^2) \right] \equiv V / \left[ \ln \frac{1}{a} + K_I(\alpha) + O(a^2) \right],$$

$$B' = \frac{1}{2} A' a^2,$$

$$[V_\theta^{(2)}/A']_p = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{t^2 \sin^2 \alpha + \sinh^2(\alpha t)}{t[t \sin(2\alpha) + \sinh(2\alpha t)]} - \frac{\cosh(\pi t) - 1}{2t \sinh(\pi t)} \right\}, \quad (1.18)$$

円柱に働く力（抵抗）は単位長当り

$$F = -4\pi\mu A' e_\theta = \frac{-4\pi\mu V}{\ln \frac{1}{a} + K_I(\alpha)} e_\theta. \quad (1.19)$$

( $e_\theta$ :  $\theta$  方向の単位ベクトル)

以上の結果をまとめると、円柱に働く力は (1.14) と (1.19) で、

また  $K_I$ ,  $K_{II}$  はそれぞれ (1.13) (1.18) から与えられ、

$$K_I(\alpha) = -\frac{1}{2} + \ln(2l) + 2 \int_0^\infty dt \left\{ \frac{t^2 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2 + \sinh^2 t}{t \left[ 2t \cdot \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha} + \sinh(2t) \right]} - \frac{\cosh t - 1}{2t \sinh t} \right\}, \quad (1.20)$$

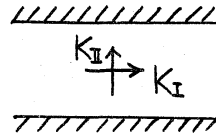
となる。次に 二三の特別な角度についての結果を記す。



・  $\alpha \rightarrow 0$  (平行二平面壁) :

$$K_I = -0.9157 + 0.2270 \alpha^2 + O(\alpha^4),$$

$$K_{II} = -0.6203 + 0.4878 \alpha^2 + O(\alpha^4),$$

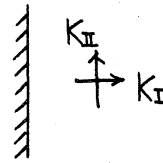


$K_I, K_{II}$  の第1項  $-0.9157, -0.6203$  はそれぞれ Faxén<sup>5)</sup>, Westberg<sup>6)</sup> の結果と一致する。

・  $\alpha \rightarrow \pi/2$  (-平面壁) :

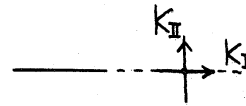
$$K_I = \ln 2 - 1, \quad K_{II} = \ln 2.$$

$K_{II}$  の値は Takaisi<sup>3)</sup> の結果と一致する。



・  $\alpha \rightarrow \pi$  (半無限平板) :

$$K_I = \ln 4 - \frac{1}{2}, \quad K_{II} = \ln 4 + \frac{1}{2}.$$



$\alpha$  の任意の値に対する  $K_I, K_{II}$  の値は図2に示しておく。

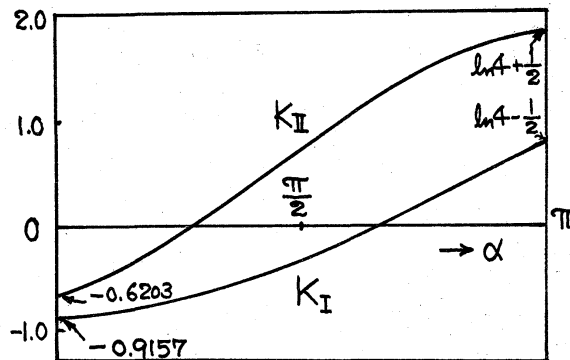


図 2

さて次に領域内の速度場について考えてみよう。こ

れは今の近似の範囲内で Case I は (1.3) と (1.12)、Case II は (1.15) と (1.16) で与えられているが、流れの関数を用いると次のように表わせる。

Case I

$$\psi = -\pi A l \sum_{i=1}^{\infty} A_{\lambda_i} \psi_{\lambda_i}(r, \theta), \quad \text{----- (1.21)}$$

$$\begin{cases} A_{\lambda_i} = \frac{\sin(\lambda_i \alpha)}{\lambda_i \cos \alpha [2\alpha \cos(2\lambda_i \alpha) - \sin(2\alpha)]}, \\ \psi_{\lambda_i} = \left(\frac{r}{l}\right)^{-\lambda_i+1} \{ \sin[(\lambda_i+1)\alpha] \sin[(\lambda_i-1)\theta] - \sin[(\lambda_i-1)\alpha] \sin[(\lambda_i+1)\theta] \}, \\ \text{但し } \lambda_i \text{ は } \sin(2\alpha\lambda_i) - \lambda_i \sin(2\alpha) = 0 \text{ の根で } |\operatorname{Re}(\lambda_i)| < |\operatorname{Re}(\lambda_{i+1})|. \end{cases}$$

----- (1.22)

### Case II

$$\psi = -\frac{\pi}{2} A l \sum_{i=1}^{\infty} B_{\lambda'_i} \psi_{\lambda'_i}(r, \theta),$$

----- (1.23)

$$\begin{cases} B_{\lambda'_i} = \frac{\cos(2\alpha) - \cos(2\lambda'_i \alpha)}{(\lambda'_i - 1) \cos \alpha \cdot \cos(\lambda'_i \alpha) [2\alpha \cos(2\lambda'_i \alpha) + \sin(2\alpha)]}, \\ \psi_{\lambda'_i} = \left(\frac{r}{l}\right)^{-\lambda'_i+1} \{ \cos[(\lambda'_i-1)\alpha] \cos[(\lambda'_i+1)\theta] - \cos[(\lambda'_i+1)\alpha] \cos[(\lambda'_i-1)\theta] \}, \\ \text{但し } \lambda'_i \text{ は } \sin(2\alpha\lambda'_i) + \lambda'_i \sin(2\alpha) = 0 \text{ の根で } |\operatorname{Re}(\lambda'_i)| < |\operatorname{Re}(\lambda'_{i+1})|. \end{cases}$$

----- (1.24)

これより領域内の流れが Moffatt type の解の<sup>12)</sup> 1 次結合で表現されることがわかり、上の解析ではその展開係数が具体的に求められた。

### 円柱が任意の位置で運動する場合

一般に drag に加え lateral force を受ける。

$$\left[ \text{drag は } O\left(\left(\ln \frac{1}{\alpha} + \text{const.}\right)^{-1}\right), \text{ lateral force は } O\left(\left(\ln \frac{1}{\alpha} + \text{const.}\right)^{-2}\right) \right]$$

しかし、lateral force のなくなる運動方向（並進の主軸）が存在し、これに沿って円柱を動かすとき円柱の受ける抵抗を位置の関数として求めると、ある頂角の範囲内では抵抗が中心面と壁の間で最小になることがわかる。

## [II] 直交二平面の内部領域に於ける球の運動

第2部では2次元くさび形領域内での3次元物体の運動の例として、直交二平面壁で囲まれた領域内の任意の位置で球が運動する場合をとりあげ、球に働く力を壁の1次の効果まで計算しよう。

図3に示したように、直交座標系  $x_1, x_2, x_3$  をとる。  
 $x_1 > 0, x_2 > 0$  の領域に粘性率  $\mu$  の流体が満たされており、点  $P(d_1, d_2, 0)$  に半径  $a$  の球が置かれている。解析は

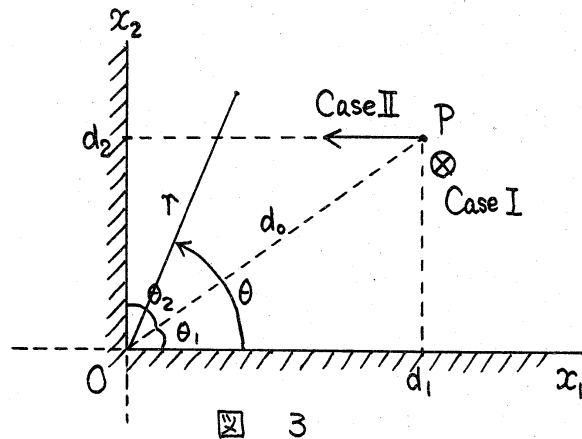


図 3

Stokes 方程式に基き、次の2つの場合に分けて考える。(球の任意方向の運動に対してはそれらを重ね合わせればよい。)

(Case I) 球が両方の壁に沿って (i.e.  $x_3$  軸に平行に) 動く場合、

(Case II) 球が一方の壁に平行、他方の壁に垂直に (i.e. 例えば  $x_1$  軸に平行に) 動く場合。

Stokes 方程式の一般解<sup>11)</sup>としては次の表現を用いる：

$$\begin{cases} v_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (x_\alpha \phi_\alpha) - 2\phi_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \psi, & p = 2\mu \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \phi_\alpha, \\ \text{但し } \nabla^2 \phi_i = \nabla^2 \psi = 0, & (i=1, 2, 3). \end{cases} \quad \text{-----}(2.1)$$

また境界条件 (以下 B.C. と略記する) は

$$\begin{cases} v_i = 0 & \text{at infinity,} \\ v_i = U_i & \text{on the sphere,} \\ v_i = 0 & \text{on the walls.} \end{cases} \quad \text{----- (2.2)}$$

Case I (球が  $x_3$  軸方向に速度  $U_3$  で並進運動をする場合)

普通の method of reflections に従って逐次解を求めてゆこう。  
まず第1近似としては球が無限に広い流体内を並進運動する時に得られる解 (これを  $V^{(1)}$  とする) を用いる。次に reflection  $V^{(2)}$  を求めねばならないが、 $V^{(2)}$  は壁の上で  $V^{(1)}$  を打ち消す (i.e. 壁の上で  $V^{(1)} + V^{(2)} = 0$  となる) ことが必要である。この時、壁が球から充分遠方にあることを考慮し、かつ壁の1次の効果まで求めるのであれば、 $V^{(2)}$  の計算に際して  $V^{(1)}$  そのものの代りに P 点に  $x_3$  軸方向の Stokeslet が置かれている流れを考えればよい。ここでは更に P 点の鏡像点にも Stokeslet を配置して解く方法を紹介する。そこで  $\phi_3, \psi$  を

$$\begin{cases} \phi_3 = c_3 \chi, \quad \psi = 0, \\ \text{但し } \chi = \frac{1}{r_I} - \frac{1}{r_{II}} + \frac{1}{r_{III}} - \frac{1}{r_{IV}}, \quad c_3 = \frac{F_3}{8\pi\mu}, \\ r_I^2 = (x_1 - d_1)^2 + (x_2 - d_2)^2 + x_3^2, \quad r_{II}^2 = (x_1 + d_1)^2 + (x_2 - d_2)^2 + x_3^2, \\ r_{III}^2 = (x_1 + d_1)^2 + (x_2 + d_2)^2 + x_3^2, \quad r_{IV}^2 = (x_1 - d_1)^2 + (x_2 + d_2)^2 + x_3^2, \end{cases} \quad \text{----- (2.3)}$$

と選ぶと、壁の上の B.C. として

$$\begin{cases} \phi_1 = 0, & \phi_2 - x_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} = x_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \equiv \alpha & \text{at } x_2 = 0, \\ \phi_2 = 0, & \phi_1 - x_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} = x_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} \equiv \beta & \text{at } x_1 = 0, \end{cases} \quad \text{-----}(2.4)$$

が残る。そこであとは調和関数  $\phi_1, \phi_2$  を (2.4) の条件の下に求めればよい。

計算手順の概略を示そう。

まず上の表現を円柱座標  $(r, \theta, x_3)$  に書き直す。

$$\nabla^2 \phi_n = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \phi_n = 0 \quad (n=1,2), \quad \text{-----}(2.5)$$

$$\text{B.C.} \begin{cases} \phi_1 = 0, & \phi_2 - \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_1 = \alpha & \text{at } \theta = 0, \\ \phi_2 = 0, & \phi_1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \phi_2 = \beta & \text{at } \theta = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad \text{-----}(2.6)$$

次に、これらに  $x_3$  に関する Fourier 変換：

$$F(r, \theta, k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_3 e^{ikx_3} f(r, \theta, x_3), \quad \text{-----}(2.7)$$

及び Kontrovich-Lebedev 変換 ( $r$  に関して)：

$$\tilde{F}(\nu, \theta, k) = \int_0^{\infty} dr \frac{1}{r} K_{i\nu}(k|r) F(r, \theta, k), \quad \text{-----}(2.8)$$

を施す。但し  $K_{i\nu}(k|r)$  は modified Bessel function で  $i$  は虚数単位、 $\nu$  は実数値をとる。これによつて (2.5)(2.6) はそれぞれ

$$\left( \frac{d^2}{d\theta^2} - \nu^2 \right) \tilde{\Phi}_n = 0 \quad (n=1,2), \quad \text{-----}(2.9)$$

$$\text{B.C.} \begin{cases} \tilde{\Phi}_1 = 0, & \tilde{\Phi}_2 - \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\Phi}_1 = \tilde{A} & \text{at } \theta = 0, \\ \tilde{\Phi}_2 = 0, & \tilde{\Phi}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{\Phi}_2 = \tilde{B} & \text{at } \theta = \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \text{-----}(2.10)$$

となる。但し

$$\begin{cases} \tilde{A} = 8\pi C_3 i k d_2 \sinh\left(\frac{\pi v}{2}\right) \sinh(\theta_2 v) K_{iv}(k d_0) / v \sinh(\pi v), \\ \tilde{B} = 8\pi C_3 i k d_1 \sinh\left(\frac{\pi v}{2}\right) \sinh(\theta_1 v) K_{iv}(k d_0) / v \sinh(\pi v), \\ d_0^2 = d_1^2 + d_2^2, \quad \theta_1 = \arctan(d_2/d_1), \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1. \end{cases} \quad \text{-----}(2.11)$$

これを解いて

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_1 = [v \tilde{A} + \sinh\left(\frac{\pi v}{2}\right) \tilde{B}] \sinh(\theta v) / \Delta(v), \\ \tilde{\Phi}_2 = [v \tilde{B} + \sinh\left(\frac{\pi v}{2}\right) \tilde{A}] \sinh(\theta^* v) / \Delta(v), \end{cases} \quad \text{-----}(2.12)$$

但し  $\Delta(v) = \sinh^2\left(\frac{\pi v}{2}\right) - v^2$ ,  $\theta^* = \frac{\pi}{2} - \theta$ ,

を得る。そこでこれらに Fourier 及び Kontrovich-Lebedev の逆

$$\text{変換: } f = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx_3} \int_0^{\infty} dv v \sinh(\pi v) K_{iv}(k|r) \tilde{F}, \quad \text{-----}(2.13)$$

を施して  $\phi_n$  が、更に (2.1) に代入して速度場が求まる。

壁の 1 次の効果は  $V^{(2)}$  によって P 点に誘導される速度がわかれば Faxén の方法によって評価できる。

P 点に誘導される速度は

$$\begin{aligned} [\Delta U_3]_P &= \frac{a}{d_2} \cdot \frac{C_3}{a} \left[ 2 \frac{d_2}{d_0} \int_0^{\infty} dv \frac{N_3(v)}{\Delta(v) \cosh(\pi v)} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{d_2}{d_1} - \frac{d_2}{d_0} \right) \right], \\ &\equiv \varepsilon k_3(\lambda) U_3, \end{aligned} \quad \text{-----}(2.14)$$

但し、 $N_3(v) = (v^2 + \frac{1}{4}) \sinh(\frac{\pi v}{2}) g_1(v)$ ,

$$g_1(v) = \cos \theta_1 \sinh(\theta_1 v) f_1(v) + \cos \theta_2 \sinh(\theta_2 v) f_2(v),$$

$$f_1(v) = \cos \theta_1 \sinh(\frac{\pi v}{2}) \sinh(\theta_1 v) + \cos \theta_2 \cdot v \sinh(\theta_2 v),$$

$$f_2(v) = \cos \theta_2 \sinh(\frac{\pi v}{2}) \sinh(\theta_2 v) + \cos \theta_1 \cdot v \sinh(\theta_1 v),$$

また、 $\lambda = d_1/d_2$ ,  $\varepsilon = a/d_2$ ,  $c_3 = \frac{3}{4} a U_3$  とした。

これより球に働く力は

$$F_3/F_{30} = 1 + \varepsilon k_3(\lambda) + O(\varepsilon^2), \quad F_{30} = 6\pi\mu a U_3 \quad \text{-----(2.15)}$$

で与えられる。

$k_3(\lambda)$  のグラフは図4に示してあるが、特に一方の壁から充分離れた場合には

$$k_3(\lambda) \sim \frac{9}{16} + 1.30854 \lambda^{-3} + O(\lambda^{-4}) \quad \text{for } \lambda \gg 1 \quad \text{-----(2.16)}$$

となり、一平面壁に平行に球が動く時の補正項<sup>2)</sup> $\frac{9}{16}$ に一致する。

## Case II (球が $x_1$ 軸方向に速度 $U_1$ で並進運動をする場合)

解法は Case I と同様なので簡単に記す。

第1近似としては球が無限に広い流体中を  $x_1$  軸方向に運動する場合の速度場をとり、これをもとにして reflection を計算する。まず

$$\phi_1 = c_1 \chi + \phi, \quad \psi = -c_1 d_1 \chi, \quad \phi_3 = 0; \quad c_1 = \frac{F_1}{8\pi\mu}, \quad \text{-----(2.17)}$$

と置けば、壁の上での B.C. は

$$\left\{ \phi = 0, \quad \phi_2 - x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \phi = \frac{\partial}{\partial x_2} [(x_1 - d_1) c_1 \chi] = \alpha' \quad \text{at } x_2 = 0, \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_2 = 0, \quad \phi - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_2 = -c_1 d_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \chi \equiv \beta' \quad \text{at } x_1 = 0, \end{array} \right. \quad \text{-----(2.18)}$$

となる。

(2.18) を満たす調和関数  $\phi, \phi_2$  は次の式を逆変換して得ら

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Phi} = [\nu \tilde{A}' + \sinh(\frac{\pi\nu}{2}) \tilde{B}'] \sinh(\theta\nu) / \Delta(\nu), \\ \tilde{\Phi}_2 = [\nu \tilde{B}' + \sinh(\frac{\pi\nu}{2}) \tilde{A}'] \sinh(\theta^*\nu) / \Delta(\nu), \end{array} \right. \quad \text{-----(2.19)}$$

ここに

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{A}' = \frac{8\pi c_1}{\nu \sinh(\pi\nu)} \left[ \nu \cosh(\frac{\pi\nu}{2}) \sinh(\theta_2\nu) K_{i\nu}(|k|d_0) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{2} |k| d_1 \sinh(\frac{\pi\nu}{2}) \{ \sinh[\theta_2(\nu-i)] K_{i(\nu-i)}(|k|d_0) + \sinh[\theta_2(\nu+i)] K_{i(\nu+i)}(|k|d_0) \} \right], \\ \tilde{B}' = \frac{-8\pi c_1}{\nu \sinh(\pi\nu)} \cdot \frac{1}{2} |k| d_1 \sinh(\frac{\pi\nu}{2}) \{ \sinh[\theta_1(\nu-i)] K_{i(\nu-i)}(|k|d_0) \\ \quad + \sinh[\theta_1(\nu+i)] K_{i(\nu+i)}(|k|d_0) \}. \end{array} \right. \quad \text{-----(2.20)}$$

これより速度場が定まるが、この場合には Case I と異なり P 点に球の進行方向だけでなくそれに垂直な方向にも速度が誘導される。従って球には抵抗と揚力の両方が働く。

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1/F_{10} = 1 + \varepsilon k_1(\lambda) + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \equiv a/\min.(d_1, d_2), \\ F_2/F_{10} = \varepsilon k_2(\lambda) + O(\varepsilon^2), \quad F_{10} \equiv 6\pi\mu a U_1. \end{array} \right. \quad \text{-----(2.21)}$$

( $k_1, k_2$  の具体的な関数形は複雑なのでここでは省略するが、必要ならば原論文を参照されたい。)

この  $F_2$  なる力は物体が壁に近づく場合には揚力として、また遠ざかる場合には逆向きの力として働く。

$k_1(\lambda), k_2(\lambda)$  の値は図 4 に示してあるが、特に物体が一方の



壁から充分離れた場合には

$$k_1(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{9}{16} + 4.04995 \lambda^{-3} + O(\lambda^4) & \text{for } \lambda \gg 1, \\ \frac{9}{8} + 2.21693 \lambda^5 + O(\lambda^6) & \text{for } \lambda \ll 1, \end{cases}$$

$$k_2(\lambda) \sim 2.07825 \lambda^{\pm 4} + O(\lambda^{\pm 5}) \quad \text{for } \lambda \gtrless 1, \quad \text{---(2.22)}$$

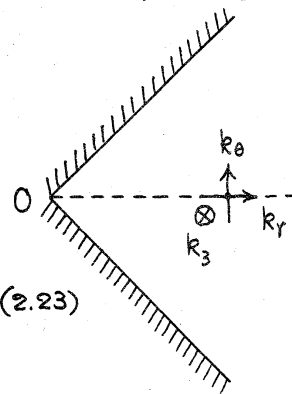
( $\lambda = d_1/d_2$ )

となり、 $\lambda \ll 1$  では一平面壁に垂直に球が運動する場合、<sup>2)</sup>

$\lambda \ll 1$  では一平面壁に平行に運動する場合の値にそれぞれ漸近し、いずれの場合にも side force が 0 になる。

参考までに、対称面内で球が  $r, \theta, x_3$  方向に運動する場合の結果を記すと

$$\begin{cases} F_r/F_{r0} = 1 + \varepsilon k_r + O(\varepsilon^2), & k_r = 1.36929, \\ F_\theta/F_{\theta0} = 1 + \varepsilon k_\theta + O(\varepsilon^2), & k_\theta = 1.16084, \\ F_3/F_{30} = 1 + \varepsilon k_3 + O(\varepsilon^2), & k_3 = 0.81911, \end{cases} \quad \text{---(2.23)}$$



となりいずれの場合にも揚力は働かない。

なお、これまでの結果は次の変換<sup>13)</sup>によって、球以外の物体に対しても適用できることを付記しておこう。

無限に広い流体中での Stokes の抵抗  $F_0$  が求まって

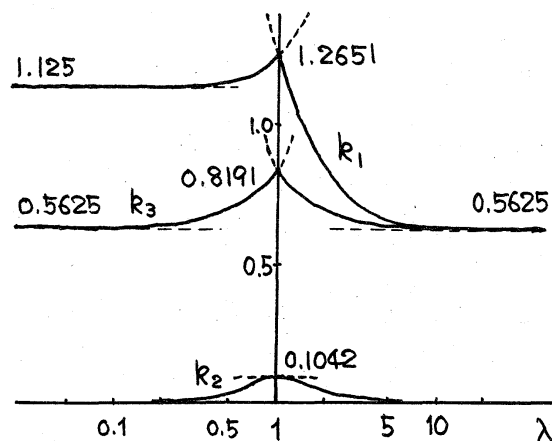


図 4

いるとして

$$\mathbf{F}_0 = -6\pi\mu\ell \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{U}, \quad \text{-----}(2.24)$$

但し  $\ell$ : 物体の代表的長さ,  $\mathbf{S}_0$ : Stokes translation tensor, と書けたとすると、壁がある場合の力  $\mathbf{F}$  は

$$\mathbf{F} = \left[ 1 - \frac{\ell}{a} \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{K} + o\left(\frac{\ell}{a}\right) \right]^{-1} \cdot \mathbf{F}_0. \quad \text{-----}(2.25)$$

で与えられる。ここに  $\mathbf{K}$  は壁の効果を表わすテンソルで、上に述べた直交二平面壁に対しては

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ k_2 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \quad \text{-----}(2.26)$$

となる。

ここでは二平面が直交する場合、しかも球に働く力に焦点を合わせて解説を試みたが、同様の計算は平面の交角が任意の場合<sup>10)</sup>に対してもなされており、物体に働く力及びモーメントに対して1次の壁効果が求められている。また第1部と類似して、角付近に3次元的な渦の列ができることも確認されている。これらの点については、また機会を改めて述べたい。

- 1) J.Happel and H.Brenner: *Low Reynolds Number Hydrodynamics*  
(Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965) Chap.7.
- 2) H.A.Lorentz: *Zittingsverl. Akad. van Wet.* 5 (1896) 168.  
neu bearb.: *Abhandl. theoret. Phys.*, Leipzig 1 (1907) 23.
- 3) Y.Takaisi: *J. Phys. Soc. Japan* 11 (1956) 1004, 1009.
- 4) H.Faxén: *Arkiv. Mat. Astro. Fys.* 17 (1923) No.27.
- 5) H.Faxén: *Proc. Roy. Swedish Inst. Eng. Res. (Stockholm)* (1946)  
No.187.
- 6) R.Westberg: *Proc. Roy. Swedish Academy Eng. Sci. (Stocclholm)*  
(1948) No.197.
- 7) R.Ladenburg: *Ann. Phys.* 23 (1907) 447.
- 8) M.Kim: *D.Sc. Thesis, Tokyo University*, 1976.\*
- 9) O.Sano and H.Hasimoto: *J. Phys. Soc. Japan* 40 (1976) 884.\*\*
- 10) O.Sano and H.Hasimoto: to be published in *J. Phys. Soc. Japan*.
- 11) I.Imai: *Ryutai Rikigaku* (Fluid Dynamics) (Syokabo, Tokyo, 1973)  
Vol.1, p.313 [in Japanese].
- 12) H.K.Moffatt: *J. Fluid Mech.* 18 (1964) 1.
- 13) H.Brenner: *J. Fluid Mech.* 18 (1964) 144.

---

\* 角のある領域内の微小物体の運動による二次元及び軸対称の粘性流

\*\* Slow Motion of a Spherical Particle in a Viscous Fluid  
Bounded by Two Perpendicular Walls